ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 29, № 2
ноябрь, 1976

АНОМАЛИИ КВАНТОВЫХ ТОКОВ ТОЧНО РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ [1)]

П. П. Кулиш, Е. Р. Нисимов

Анализируются квантовые сохраняющиеся токи уравнения синус-Гордон и массивной модели Тирринга. Возникающие в результате перенормировки аномальные члены в тождествах Уорда ведут лишь к умножению на константу законов сохранения сумм соответствующих степеней импульсов частиц начального и конечного состояний. Факторизация S-матрицы сохраняется в квантовой теории во всех порядках теории возмущений.

1. Большинство нелинейных уравнений, точно решаемых с использованием метода обратной задачи теории рассеяния, обладают бесконечным числом локальных законов сохранения. Наиболее интересным среди таких уравнений с точки зрения квантовой теории поля является синус-Гордон уравнение в двумерном пространстве-времени

$$u_{tt}-u_{xx}+\frac{m^2}{\beta}\sin\beta u=0,\qquad u_x\equiv\partial_x u\equiv\partial u/\partial x, \tag{1}$$

которое порождается лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}(\partial_\mu u)^2+\frac{m^2}{\beta^2}(\cos\beta u-1). \tag{2}$$

Полный анализ классической теории для уравнения (1) с граничными условиями $\beta u(x)\to 0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ при $|x|\to\infty$ дан в работах [1, 2]. В этих работах показано, что кроме решений, «близких» к решениям свободного уравнения Клейна – Фока с массой m, уравнение (1) имеет частицеподобные решения (солитоны и двойные солитоны) с массами $8m/\beta^2$ и M $(0<M<16m/\beta^2)$ соответственно.

После появления работ [1, 2] возникло большое количество работ, посвященных квантовой теории уравнения (1). Упомянем лишь работы [3–5], где обсуждается квантование решений, близких к свободным (основное поле) в рамках теории возмущений [3], связь уравнения (1) с массивной моделью Тирринга в гамильтоновой квантовой теории [4] и в теории возмущений [5]. Последовательное квантование солитонных решений предложено в работе [6].

Интересный факт – отсутствие множественного рождения, более того, сохранение набора импульсов частиц после столкновения и факторизация S-матрицы [3, 7] – является следствием бесконечного числа сохраняю-

[1)] Результаты работы докладывались на IV Международном совещании по нелокальной квантовой теории поля, Алушта, апрель 1976 г.

щихся интегралов (зарядов) для уравнения (1) [1, 2]. В подходящих переменных эти интегралы являются суммами n-х степеней импульсов [7]

$$
(3) \qquad I_0^{(n)} = \int p_0 p^{n-1} \rho(p)\, du,
$$

$$
I_1^{(n)} = \int p^n \rho(p)\, dp; \qquad p_0^2 = p^2 + m^2;
$$

$$
n = 2k+1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .
$$

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением только решений, близких к свободным, поэтому в (3) не добавлены суммы, отвечающие вкладу солитонов.

Наша задача состоит в том, чтобы проследить, сохраняются ли выражения (3) и порождающие их локальные токи $j_\mu^{(n)}(x, t)$ в квантовой теории. Токи $j_\mu^{(n)}(x, t)$ строятся из поля $u(x)$ и его производных $u_x, u_{xx}, \ldots$, причем число производных в $j_\mu^{(n)}(x, t)$ растет с номером n [8]. В связи с этим, несмотря на то, что теория с лагранжианом (2) суперперенормируемая, для определения токов $j_\mu^{(n)}(x, t)$, $n > 1$, требуются дополнительные перенормировки. Для этой цели в работе используется формализм нормальных произведений Циммермана [9]. Тождества Уорда, связанные с локальными токами $j_\mu^{(n)}(x, t)$, вследствие перенормировки обладают аномальными членами, которые могут дать, вообще говоря, ненулевой вклад на массовой поверхности и нарушить соотношения

$$
(4) \qquad \sum_{j=1}^{l} (p_j^{\text{in}})^n = \sum_{j=1}^{l} (p_j^{\text{out}})^n, \qquad n = 1, 2, \ldots ,
$$

обеспечивающие сохранение набора импульсов частиц после столкновения. На такую возможность было указано в работе [10], где рассмотрен только ток $j_\mu^{(3)}(x)$ и вычислен связанный с ним аномальный член в интегральном тождестве Уорда. Используемый нами формализм нормальных произведений [9] позволяет получить структуру аномальных членов в дифференциальных тождествах Уорда для любых токов $j_\mu^{(n)}(x, t)$ и показать, что для достаточно малых значений константы связи β аномальные члены в интегральных тождествах Уорда сводятся к швингеровским и справедливы соотношения (4). Тем самым на массовой поверхности аномальные члены тождеств Уорда вклада не дают. В заключительном пункте мы отмечаем, что для массивной модели Тирринга, где также существуют высшие сохраняющиеся токи, справедливо аналогичное утверждение.

Авторы искренне благодарны Л. Д. Фаддееву, И. Я. Арефьевой и В. Е. Корепину за стимулирующие обсуждения.

2. В классической теории уравнения (1) наиболее простой вид локальные сохраняющиеся токи $j_\mu^{(n)}(x, t)$ имеют в переменных σ, τ:

$$
\sigma = {}^1/_2(t+x), \quad \tau = {}^1/_2(t-x), \quad \partial_\sigma = \partial_t + \partial_x, \quad \partial_\tau = \partial_t - \partial_x.
$$

Уравнение (1) в этих переменных $u_{\sigma\tau} = (-m^2/\beta)\sin\beta u$ было решено методом обратной задачи в работе [11] и для сохраняющихся токов $\partial_\tau j_\tau^{(n)} = \partial_\sigma j_\sigma^{(n)}$

получены рекуррентные соотношения:

$$(5)\qquad j_\tau^{(n+1)}=u_\sigma\partial_\sigma(j_\tau^{(n)}/u_\sigma)+\frac{\beta^2}{4}\sum_{l+k=n} j_\tau^{(l)}j_\tau^{(k)}+u_\sigma{}^2\delta_{n,0};$$

$$(6)\qquad j_\sigma^{(n+1)}=2\frac{m^2}{\beta^2}\delta_{n,0}\cos\beta u-\frac{m^2}{\beta^2}(j_\tau^{(n)}/u_\sigma)\sin\beta u.$$

В соотношениях (5), (6) токи $j_\mu^{(k)}=0$ при $k\leqslant 0$. Для получения пары сохраняющихся токов, соответствующих данному n (см. (4)), нужно воспользоваться симметрией уравнения (1) относительно замены $\sigma\leftrightarrow\tau$. Из (5) следует, что $j_\tau^{(n)}$ — полином, четный по u и однородный по производным ∂_σ порядка $n+1$. Отметим, что все четные $j_\tau^{(n)}$ являются полными производными $\partial_\sigma(F[u_\sigma, u_{\sigma\sigma},\ldots])$. Первые четыре компоненты равны $j_\tau^{(1)}=u_\sigma{}^2$, $j_\tau^{(2)}=u_\sigma u_{\sigma\sigma}$, $j_\tau^{(3)}=u_\sigma\partial_\sigma{}^3u+(\beta^2/4)u_\sigma{}^4$, $j_\tau^{(4)}=\partial_\sigma(u_\sigma\partial_\sigma{}^3u-u_{\sigma\sigma}{}^2/2+5\beta^2u_\sigma{}^4/16)$, а общая структура $j_\tau^{(n)}$ следующая:

$$(7)\qquad j_\tau^{(n)}=\sum_{k=1}^{n+1}A_k u_\sigma{}^k\partial_\sigma{}^{\alpha_1}u\ldots\partial_\sigma{}^{\alpha_k}u;\qquad \alpha_i=0,2,3,\ldots,n;$$

$$k+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=n+1.$$

3. Квантование основного поля (не солитонов) для лагранжиана (2) проводим по теории возмущений, выбирая нормальное упорядочение по отношению к свободному бозонному полю массы m. Расходимостей в теории не возникает, и для того, чтобы полюс полного пропагатора был в точке $p^2=m^2$, достаточно было бы добавить контрчлен конечной перенормировки массы $\Delta m^2(\beta)u^2/2$. Однако, следуя [3], чтобы сохранить структуру взаимодействия, мы будем добавлять контрчлен $\delta m^2/\beta(\cos\beta u-1)$, где ряд по β $\delta m^2(\beta)$ строится рекуррентно по теории возмущений. Конечной ренормировки поля $u(x)$ проводить не будем, включая $Z^{1/2}$ в формулы приведения. Окончательно эффективный лагранжиан имеет вид

$$(8)\qquad L=\frac{1}{2}:[(\partial_\mu u)^2-m^2u^2]:+:\left[\frac{\tilde m^2(\beta)}{\beta^2}(\cos\beta u-1)+\frac{m^2}{2}u^2\right]:,$$

$$\tilde m^2(\beta)=m^2+\delta m^2(\beta),\qquad \delta m^2(\beta)=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k\beta^{2k}.$$

Без подробных объяснений будем пользоваться формализмом нормальных произведений для составных операторов [9], в котором составные операторы, в нашем случае токи (5), (6), определяются через их функции Грина. Все произведения операторов, стоящие под знаком усреднения[2] $\langle B_1(x_1)\ldots B_n(x_n)\rangle$, являются T-упорядоченными, для упрощения формул значок T мы опускаем. Составной оператор $B(x)$ — в простейших случаях моном по квантовому полю $u(x)$ и его производным $\partial_\sigma{}^k u(x)$ — определяется

[2] Везде в дальнейшем аргументы x, y отвечают паре координат (σ,τ).

правилом вычисления конечных частей фейнмановских диаграмм, соответствующих его функции Грина с основным полем $u(x)$: $\langle N_a[B](x)u(y_1)\ldots$ $\ldots u(y_n)\rangle$. Индекс a при знаке нормального произведения у монома $B(x)$ определяет порядок вычитания в подграфах, содержащих вершину, отвечающую моному $B(x)$, и должен быть не меньше канонической размерности $B(x)$. В двумерном пространстве-времени каноническая размерность скалярного поля равна нулю и размерность $B(x)$ определяется числом входящих в него производных.

При выводе дифференциальных тождеств Уорда, связанных с токами (5), (6), используются уравнения движения для эффективного лагранжиана (8). Запишем их для произвольного монома $B(x)$ размерности $b=$ $=\dim B(x)$, используя обозначения

$$X=u(y_1)u(y_2)\ldots u(y_k),\qquad L_1=(\tilde{m}^2/\beta^2)(\cos\beta u-1)+m^2u^2/2, \tag{9}$$
$$\langle N_{b+n+2}[B\partial^n u_{\sigma\tau}](x)X\rangle=-m^2\langle N_{b+n+2}[B\{\partial^n u\}](x)X\rangle+$$
$$+\langle N_{b+n}[B\partial^n\delta L_1/\delta u](x)X\rangle-i\sum_{j=1}^{k}\partial^n\delta(x-y_j)\langle N_b[B](x)\hat{X}\rangle,$$

где $\hat{X}=\prod\limits_{i\neq j}u(y_i)$, и фигурные скобки в первом слагаемом правой части означают, что в подграфах, содержащих линию, соответствующую $\partial^n u$, делается два сверхвычитания. Вначале получим дифференциальное тождество Уорда для тока $j_\tau^{(3)}(x)$

$$\partial_\tau\langle N_4[j_\tau^{(3)}](x)X\rangle=\langle N_5[\partial_\tau j_\tau^{(3)}](x)X\rangle=$$
$$=\langle N_5[(\beta^2u_\sigma{}^3+\partial_\sigma{}^3u)u_{\sigma\tau}+u_\sigma(u_{\sigma\tau})_{\sigma\sigma}](x)X\rangle.$$

Для двух слагаемых под знаком N-произведения используем уравнения движения (9) и возможность преобразования части слагаемых к виду $\partial_\sigma j_\sigma^{(3)}$:

$$\langle N_5[\partial_\tau j_\tau^{(3)}](x)X\rangle=\langle N_3[\partial_\sigma j_\sigma^{(3)}](x)X\rangle- \tag{10}$$
$$-i\sum_{j=1}^{k}\partial_\sigma{}^2\delta(x-y_j)\langle u_\sigma(x)X\rangle-i\sum_{j=1}^{k}\delta(x-y_j)\langle N_3[\beta^2u_\sigma{}^3+\partial_\sigma{}^3u](x)\hat{X}\rangle+$$
$$+m^2\langle N_3[(\beta^2u_\sigma{}^3+\partial_\sigma{}^3u)(u-\{u\})](x)X\rangle+m^2\langle N_3[u_\sigma(u_{\sigma\sigma}-\{u_{\sigma\sigma}\})](x)X\rangle,$$

где $\hat{X}$ означает моном X без поля $u(y_j)$, а фигурные скобки $\{\ \}$, как и в (9), — два сверхвычитания в подграфах, содержащих линию, соответствующую $u(x)$ или $u_{\sigma\sigma}(x)$.

Для тока $j_\tau^{(n)}$ имеем

$$\partial_\tau j_\tau^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}Y_k\partial_\sigma{}^k(u_{\sigma\tau}),$$

где Y_k — линейные комбинации мономов от u_σ, $u_{\sigma\sigma},\ldots$, однородных по ∂_σ порядка $n-k$, которые определяются током $j_\tau^{(n)}(x)$ (5). Дифференциальное тождество Уорда для $j_\mu^{(n)}(x)$ будет иметь следующий вид:

$$(11)\qquad \langle N_{n+2}[\partial_\tau j_\tau^{(n)}](x)X\rangle=\langle N_n[\partial_\sigma j_\sigma^{(n)}](x)X\rangle-$$

$$-i\sum_{j=1}^{k}\Bigl(\sum_{l=0}^{n-1}\langle N_{n-l}[Y_l](x)\hat{X}\rangle\partial_\sigma{}^l\Bigr)\delta(x-y_j)+$$

$$+m^2\sum_{l=0}^{n-l}\langle N_n[Y_l(\partial_\sigma{}^l u-\{\partial_\sigma{}^l u\})](x)X\rangle.$$

Дополнительные члены со сверхвычитаниями в равенствах (10) и (11) ведут к аномалиям в тождествах Уорда. Можно вычислить явный вид этих членов, используя тождества Циммермана [9] или анализируя отвечающие им графики Фейнмана. Мы, однако, делать этого не будем, а перейдем к интегральным тождествам Уорда, из которых следуют соотношения (4). Проинтегрируем (10) по всему пространству-времени; члены, являющиеся полными производными, исчезнут и в результате получим

$$(12)\qquad 2i\sum_{j=1}^{k}\langle N_3[\partial_\sigma{}^3u+\beta^2u_\sigma{}^2/2](y_j)\hat{X}\rangle=$$

$$=m^2\int d^2x\langle N_3[(\partial_\sigma{}^3u+\beta u_\sigma{}^3)(u-\{u\})](x)X\rangle.$$

Квадратичное слагаемое под знаком N-произведения в правой части вклада не дает, а оставшееся приводится к виду

$$(13)\qquad \tilde{m}^2\beta(c_1+\beta^2c_2)\int d^2x\langle N_3[u_\sigma{}^3\sin\beta u](x)X\rangle,$$

где c_1 и c_2 некоторые константы, не зависящие от β.

При переходе на массовую поверхность с учетом формул приведения левая часть (12) дает соотношение вида (4)

$$\sum_{j=1}^{m}(p_{\sigma,j}^{\text{in}})^3=\sum_{j=m+1}^{k}(p_{\sigma,j}^{\text{out}})^3$$

при условии, что правая часть (12) при переходе на массовую поверхность либо обращается в нуль, либо тоже дает с точностью до множителя соотношение (4). Именно последнее и имеет место. Покажем это, воспользовавшись вновь уравнениями движения (9),

$$(14)\qquad \frac{\tilde{m}^2(\beta)}{\beta}\int d^2x\langle N_3[u_\sigma{}^3\sin\beta u](x)X\rangle=-\int d^2x\langle N_5[u_\sigma{}^3u_{\sigma\tau}](x)X\rangle+$$

$$+m^2\int d^2x\langle N_3[u_\sigma{}^3(u-\{u\})](x)X\rangle-i\sum_{j=1}^{k}\langle N_3[u_\sigma{}^3](y_j)\hat{X}\rangle.$$

Первый член в правой части (14) является интегралом от полной производной по σ и исчезает, а второй сводится к члену, стоящему в левой части. Окончательно имеем

$$(15)\qquad c(m,\beta)\int d^2x\langle N_3[u_\sigma{}^3\sin\beta u](x)X\rangle=\sum_{j=1}^{k}\langle N_3[u_\sigma{}^3](y_j)\hat{X}\rangle.$$

Правая часть (15) при переходе на массовую поверхность и использовании формул приведения дает

$$\lim_{p_j^2\to m^2}\prod_{j=1}^{k} Z^{-1/2}(p_j^2-m^2)\,\Phi\sum_{j=1}^{k}\langle N_3[u_\sigma^3](y_j)\hat{X}\rangle=$$

$$=\langle m+1,\ldots,k;\mathrm{out}|1,\ldots,m;\mathrm{in}\rangle\Phi\sum_{j=1}^{k}\langle N_3[u_\sigma^3](y_j)u(0)\rangle^{\mathrm{prop}}|_{p_j^2=m^2},$$

где Φ обозначает преобразование Фурье по переменным $y_1,\ldots,y_k$ — переход к импульсному представлению, а значок prop — одночастичную неприводимость. Вычисление $\langle\ldots\rangle^{\mathrm{prop}}$ приводит к равенству

$$\Phi\langle N_3[u_\sigma^3](y_j)u(0)\rangle|_{p_j^2=m^2}=c(m^2,\beta)\,p^3_{j,\sigma},$$

и тем самым из (15) следует (4) для $n=3$.

В случае тока $j_\mu^{(n)}(x)$ с произвольным n такой результат будет получен нами при достаточно малых константах связи, так как для тока $j_\mu^{(n)}(x)$ число аномальных членов зависит от n и на массовой поверхности они удовлетворяют системе линейных неоднородных уравнений. По теории возмущений при малых β определитель системы отличен от нуля, система имеет единственное решение, а неоднородные члены пропорциональны $\left(\sum(p^{\mathrm{in}})^n-\sum(p^{\mathrm{out}})^n\right)$.

Рассмотрим интеграл от аномальных членов в правой части (11)

$$(16)\quad \sum_{l=0}^{n-1}\int d^2x\langle N_n[Y_l(\partial_\sigma^l u-\{\partial_\sigma^l u\})](x)X\rangle=\sum_{l=1}^{n}\int d^2x\langle N_n[B_l(u-\{u\})](x)X\rangle.$$

Структура мономов $B_l(x)$ зависит от тока $j_\tau^{(n)}(x)$, и в их выборе имеется некоторый произвол, связанный с возможностью добавлять в правой части (16) под знаком N-произведения полную производную. Важно, что наименьшая степень мономов $B_l(x)$ по $u(x)$ равна трем и они однородны по ∂_σ степени n. Это следует из того, что $j_\tau^{(n)}(x)$ — полином, четный по $u(x)$ и что для квадратичной по $u(x)$ части $j_\tau^{(n)}(x)$ аномальных членов не возникает.

Выражая $\sin\beta u$ через уравнения движения и преобразуя получающиеся выражения с использованием полных производных, например, $6u_\sigma^5u_{\sigma\tau}=\partial_\tau(u_\sigma^6)$, $3u_\sigma^2u_{\sigma\sigma}u_{\sigma\tau}=\partial_\tau(u_\sigma^3u_{\sigma\sigma})-u_\sigma^3(u_{\sigma\tau})_\sigma,\ldots$, приходим к системе уравнений

$$(17)\quad \int d^2x\langle N_n[B_l(u-\{u\})](x)X\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}(\beta)\int d^2x\langle N_n[B_k\sin\beta u](x)X\rangle,$$

$$\frac{\widetilde{m}^2}{\beta}\int d^2x\langle N_n[B_l\sin\beta u](x)X\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}'(\beta)\int d^2x\langle N_n[B_k\sin\beta u](x)X\rangle+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}a_{lk}''(\beta)\int d^2x\langle N_n[B_k(u-\{u\})](x)X\rangle-i\sum_{k,j}c_{kj}\langle N_n[B_k](y_j)\hat{X}\rangle.$$

Коэффициенты $a_{lk}(\beta)$ — конечные ряды по β вида $a_{lk}(\beta)=\beta c_{lk}^{(1)}+\beta^2 c_{lk}^{(2)}+\ldots$ $\ldots+\beta^q c_{lk}^{(q)}$, где $c_{lk}^{(j)}$ — числа. Для достаточно малых β матрица получившейся системы близка к единичной и определитель отличен от нуля. Как уже говорилось, мономы $B_l(x)$ однородны по ∂_σ степени n, поэтому после перехода на массовую поверхность неоднородные члены системы (17) дают с точностью до множителя соотношения (4) и, тем самым, интегральные тождества Уорда приводят к тем же законам сохранения, что и в классической теории.

4. Соответствие в квантовой теории [4, 5] между уравнением (1) и массивным фермионным полем $\psi_\alpha(x)$, $\alpha=1, 2$, в двумерном пространстве-времени, взаимодействующим по закону $(\bar\psi\gamma_\mu\psi)^2$, а также решение массивной модели Тирринга в классической теории [12], когда $\psi_\alpha(x)$ — комплексные числа, позволяют, естественно, предположить существование бесконечного числа законов сохранения в массивной модели Тирринга для $\psi_\alpha(x)$ — элементов грассмановой алгебры. В переменных σ, τ уравнения модели имеют вид

$$(18)\qquad i\partial_\tau\psi_1=m\psi_2+\lambda\rho_2\psi_1,\quad i\partial_\sigma\psi_2=m\psi_1+\lambda\rho_1\psi_2;\quad \rho_\alpha=\psi_\alpha{}^*\psi_\alpha,\quad \alpha=1,2,$$

звездочка означает инволюцию в грассмановой алгебре с образующими $\psi_\alpha(x)$, $\psi_\alpha{}^*(x)$; $\psi_\alpha\psi_\beta+\psi_\beta\psi_\alpha=0$. Используя уравнения движения и свойства грассмановой алгебры, можно показать, что из рекуррентных соотношений

$$b_{n+1}=\partial_\sigma b_n-i\lambda\rho_1 b_n-2i\lambda\sum_{k+l=n,\ k\neq 0} b_k{}^*\psi_1 b_l+\psi_1\delta_{n+1,0};\quad b_n=0,\ n<0$$

следует существование бесконечного числа сохраняющихся токов [3])

$$\partial_\tau(\psi_1{}^* b_n-\text{h.c.})=im\partial_\sigma(\psi_2{}^* b_{n-1}+\text{h.c.}).$$

Простейший нетривиальный ток $J_\mu^{(3)}$ и закон сохранения следующие:

$$(19)\qquad \partial_\tau(\psi_1{}^*\partial_\sigma{}^3\psi_1+3i\lambda\rho_1\psi_{1\sigma}{}^*\psi_{1\sigma}-\text{h.c.})=im\partial_\sigma(\psi_2{}^*\psi_{1\sigma\sigma}-i\lambda\psi_2{}^*\rho_1\psi_{1\sigma}+\text{h.c.}).$$

Равенство (19) можно проверить и непосредственным вычислением с использованием уравнений движения и свойств грассмановой алгебры.

В квантовой теории массивная модель Тирринга, в отличие от модели с лагранжианом (2), является лишь перенормируемой, а не суперперенормируемой теорией. В данной работе мы не будем останавливаться на связанных с этим дополнительных трудностях, отметим только, что они не позволяют вычислить явно аномальные члены, отвечающие току $J_\mu^{(3)}(x)$. Эффективный лагранжиан массивной модели Тирринга имеет вид

$$L(x)=\frac{i}{2}(1+b)\bar\psi\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi-(m+a)\bar\psi\psi-\frac{1}{4}(\lambda+c)(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(\bar\psi\gamma_\mu\psi),$$

где a, b, c — конечные перенормировки массы, волновой функции и заряда. В силу громоздкости дифференциальное тождество Уорда приводить не будем, а выпишем сразу интегральное, которое позволяет судить о струк-

---

[3]) К моменту отправления работы в печать нам стали известны препринт Р. Флюме и др. и препринт Б. Берга и др., где приведены примеры сохраняющихся токов. Их выражения для $J_\mu^{(n)}(x)$, $n=3, 5, 7$ совпадают с токами, получающимися из рекуррентных соотношений.

туре аномальных членов в этой модели. Квантовое уравнение движения для входящего в составной оператор квантованного поля $\psi_1(x)$ имеет вид

$$(1+b)\langle N[B\partial^k\psi_{1\tau}](x)X\rangle=-im\langle N[B\{\partial^k\psi_2\}](x)X\rangle- \\ -ia\langle N[B\partial^k\psi_2](x)X\rangle-i(\lambda+c)\langle N[B\partial^k(\rho_2\psi_1)](x)X\rangle+ \\ +\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j+1}\partial_x{}^k\delta(x-y_j)\delta_{\beta_j 2}\langle N[B](x)\hat{X}\rangle, \tag{20}$$

где $X=\prod_{k=1}^{n}\psi_{\alpha k}(x_k)\prod_{k=1}^{n}\psi_{\beta k}{}^*(y_k)$, $\hat{X}$ — тот же моном без поля. Индекс у значка нормального произведения N мы опустили, считая его всюду отвечающим минимальному числу вычитаний, а фигурные скобки теперь означают, что в подграфе, содержащем линию, отвечающую члену $\{\partial^k\psi_2(x)\}$, имеется одно сверхвычитание. Уравнения, аналогичные (20), пишутся и для полей ψ_2, $\psi_1{}^*$, $\psi_2{}^*$.

После проверки равенства (19) с использованием квантовых уравнений движения и интегрирования результата по d^2x получаем интегральное тождество Уорда, отвечающее току $J^{(3)}_{\mu}(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\Gamma(-1)^{n+k+1}\left\langle\psi^{*}_{1\sigma\sigma\sigma}(y_k)\prod_{i=1}^{n}\psi(x_i)\prod_{j\neq k}^{n}\bar{\psi}(y_j)\right\rangle+ \\ +(-1)^{k-1}\left\langle\psi_{1\sigma\sigma\sigma}(x_k)\prod_{i\neq k}^{n}\psi(x_i)\prod_{j=1}^{n}\bar{\psi}(y_j)\right\rangle\Bigg]+ \\ +i(m+a)\sum_{k=1}^{n}\Bigg[(-1)^{n+k-1}\delta_{\beta_k 1}\left\langle\psi^{*}_{1\sigma\sigma}(y_k)\prod_{i=1}^{n}\psi(x_i)\prod_{j\neq k}^{n}\bar{\psi}(y_j)\right\rangle- \\ -(-1)^{k-1}\delta_{\alpha_k 2}\left\langle\psi_{1\sigma\sigma}(x_k)\prod_{i\neq k}^{n}\psi(x_i)\prod_{j=1}^{n}\bar{\psi}(y_j)\right\rangle\Bigg]= \\ =\frac{3m(\lambda+c)}{1+b}\int d^2x\langle N[\psi_{1\sigma}{}^*\psi_{1\sigma}(\bar{\psi}\{\psi\}-\{\bar{\psi}\}\psi)](x)X\rangle+\ldots. \tag{21}$$

Многоточие означает опущенные швингеровские члены, которые, как и в предыдущем пункте, при переходе на массовую поверхность в импульсном представлении дают соотношение (4) для третьих степеней импульсов, умноженное на некоторую постоянную.

Кроме того, что вклад в аномальные члены в правой части (21) теперь вносит, в силу лишь перенормируемости теории, бесконечное число графиков Фейнмана, их структура значительно сложнее, чем в предыдущем случае. Индекс расходимости графа в модели Тирринга $\omega=2-{}^1/_2 l_{\text{ext}}$, где l_{ext} — число внешних линий. В интересующие нас подграфы входит вершина, вообще говоря, с двумя производными и имеется одно сверхвычитание. Следовательно, для таких подграфов индекс расходимости $\omega=5-l_{\text{ext}}/2$, и вклад в аномальный член дают подграфы с числом внешних линий l_{ext} вплоть до десяти. Имеется целый ряд упрощений, связанных с фермионным характером поля $\psi_\alpha(x)$, лоренцевской ковариантностью и C, P — инвариантностью, которые позволяют провести анализ аномальных членов до конца и показать, что и в этой модели справедливы законы сохранения классической теории. Вычисления, однако, очень громоздки и утомительны и, вместе с другими токами $J_\mu^{(n)}(x)$, будут приведены в отдельной работе.

Отметим в заключение, что рассмотренные нами токи порождают динамические законы сохранения. Токи, порождающие топологические заряды, сохраняются независимо от динамики (уравнений движения) и к аномалиям не ведут.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проиллюстрируем общую схему вычисления аномальных членов на примере тока $j_\mu^{(3)}(x)$ и правой части формулы (12). Анализ соответствующих диаграмм (рис. 1) существенно упрощается благодаря суперперенормируемости двумерных скалярных моделей. В нашем случае индекс расходимости подграфа γ, содержащего вершину $v(x)=N[u_\sigma{}^3u](x)$, равен $\omega=d+\delta-2n$, где d – число производных операторного монома в вершине v, n – число вершин в γ (за исключением v), δ – число сверхвычитаний,

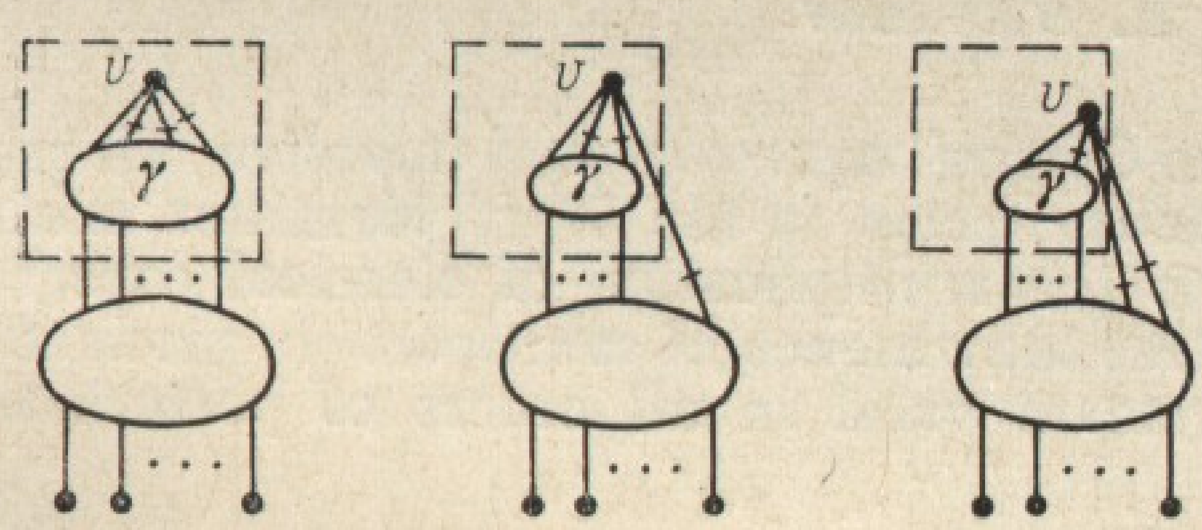

Рис. 1

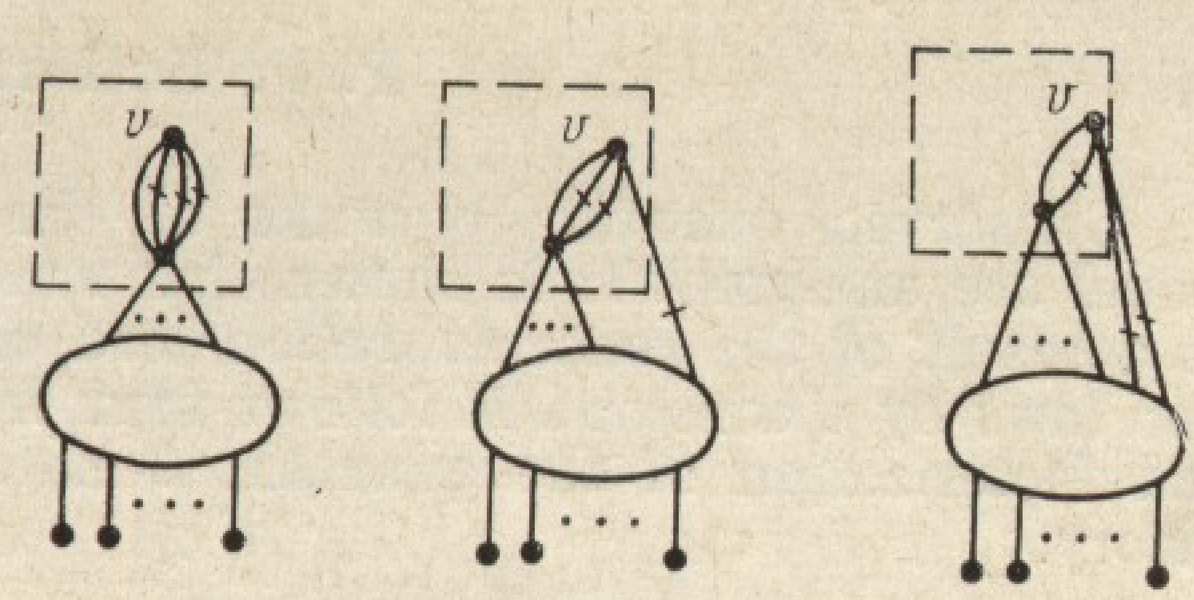

Рис. 2

равное 0 или 2, если γ содержит линию, отвечающую множителю под знаком нормального произведения $\{u\}$. На рис. 1, 2 через $D^{(k)}$ обозначен $k+1$-й член разложения Маклорена коэффициентной функции $G^{(\gamma)}$ подграфа γ, обведенного пунктиром, по внешним к γ импульсам (входящий в вершину v импульс, внешний ко всей диаграмме в целом, равен нулю).

Из соображений лоренцовой ковариантности (отсутствие в двумерном пространстве-времени инвариантных тензоров нечетного ранга) следует, что в каждом подграфе γ (рис. 1) вклад дает только один член в разложении Маклорена и только подграфы с $n=1$; соответствующая вершина имеет вид $i\delta^{k+1}L_1/\delta u^{k+1}$,

$$D^{(k)}G^{(\gamma)} = \frac{1}{k!}\, p^{\mu_1}\dots p^{\mu_k} \left(\frac{\partial G^{(\gamma)}_{\nu_1\dots\nu_k}(p)}{\partial p^{\mu_1}\dots\partial p^{\mu_k}} \right)\Bigg|_{p=0},$$

$\nu_1=\dots=\nu_k$ – σ-компоненты, $k=3,\ 2,\ 1$ соответственно (см. рис. 2). В координатном пространстве $p^{\mu_1},\dots,p^{\mu_k}$ переходят в дифференцирование по σ-компоненте, и вклады подграфов рис. 2 равны 0, $\mathrm{const}\cdot\beta^3\tilde{m}^2/m^2$, $-(\pi/2)\cdot\beta\tilde{m}^2/m^2$, соответственно.

Окончательно получаем

$$\int d^2x\, \langle N_3[u_\sigma{}^3(u-\{u\})](x)X\rangle =$$

$$=\frac{\tilde{m}^2(\beta^2)}{m^2}\,\beta\left(-\frac{\pi}{2}+\beta^2\cdot\mathrm{const}\right)\int d^2x\,\langle N_3[u_\sigma{}^3\sin\beta u](x)X\rangle.$$

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 июня 1976 г.

Литература

[1] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР, **219**, 1334, 1974.
[2] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. ТМФ, **21**, 160, 1974.
[3] И. Я. Арефьева, В. Е. Корепин. Письма в ЖЭТФ, **20**, 680, 1974.
[4] А. К. Погребков, В. Н. Сушко. ТМФ, **24**, 433, 1975.
[5] S. Coleman. Phys. Rev., **D11**, 2088, 1975.
[6] В. Е. Корепин, Л. Д. Фаддеев. ТМФ, **25**, 147, 1975.
[7] П. П. Кулиш. Препринт ИФВЭ 75–123, Серпухов, 1975.
[8] П. П. Кулиш. Препринт ИФВЭ 74-155, Серпухов, 1974.
[9] W. Zimmermann. Ann. Phys., **77**, 536, 1973.
[10] R. Flume. Preprint DESY 75/33, 1975.
[11] Л. А. Тахтаджян. ЖЭТФ, **66**, 476, 1974. M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, H. Segur. Phys. Rev. Lett., **30**, 1262, 1973.
[12] А. В. Михайлов. Письма в ЖЭТФ, **23**, 356, 1976.

ANOMALIES OF QUANTUM CURRENTS IN EXACTLY SOLVABLE MODELS

P. P. Kulish, E. R. Nissimov

Conserved quantum currents of the Sine-Gordon equation and massive Thirring model are analysed. It is shown that «anomalous» terms in the Ward identities arising as a result of the renormalisation lead only to the multiplication of classical conservation laws by a constant. It follows from here trat the absence of multiparticle production and factorization of the quantum *S*-matrix remain valid in all orders of perturbation theory.
